

РЕШЕНИЕ ДИФРАКЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ШВАРЦА: МЕТОДЫ ПРОСТОЙ И ОПТИМАЛЬНОЙ ИТЕРАЦИИ

Гнатюк М. А.¹; Морозов В. М.¹, канд. ф.-м. наук, доцент;
Сьянов А. М.², д. техн. наук, профессор

¹ Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,
Днепропетровск, Украина

² Днепродзержинский государственный технический университет,
Днепродзержинск, Украина

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на бесконечной фазированной антенной решетке из плоскопараллельных волноводов с конечной толщиной стенок, сканирующей в H -плоскости (рис. 1).

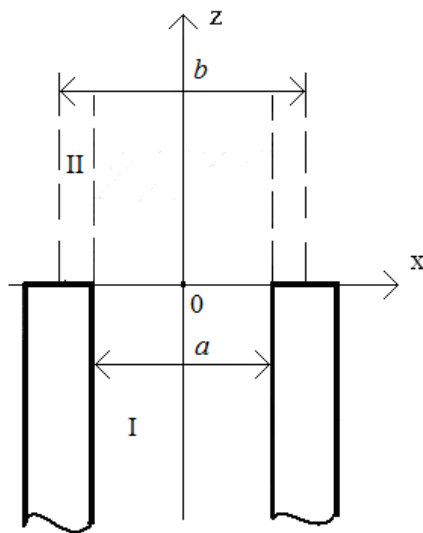


Рисунок 1. Ячейка фазированной антенной решетки

Ввиду одинаковости полей во всех ячейках, кроме фазы, рассматривается поле только в одной ячейке, расположенной в начале координат. Для решения этой задачи методом Шварца разобьем всю область определения поля в выбранной ячейке на две пересекающиеся области. Область I: $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-\infty \leq z \leq \infty$. Область II: $-b/2 \leq x \leq b/2$, $0 \leq z \leq \infty$. В области I при $z \rightarrow -\infty$ возбуждается волна H_{10} плоскопараллельной линии. Стенки волноводов предполагаются идеально проводящими, а среда однородной и изотропной. Зависимость от времени задается множителем $\exp(j\omega t)$. Рассматриваемая ячейка решетки однородна относительно оси Oy , поэтому электромагнитное поле в ней будет

полностью определяться E_y компонентой этого поля, которая удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца. Составим следующую систему интегральных представлений для полных полей областей:

$$E^I(x, z) = E_{ex}(x, z) + \int_0^\infty E^{II}\left(-\frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^I\left(x, z; -\frac{a}{2}, z'\right) dz' - \int_0^\infty E^{II}\left(\frac{a}{2}, z'\right) \frac{\partial}{\partial x'} G^I\left(x, z; \frac{a}{2}, z'\right) dz'; \quad (1)$$

$$E^{II}(x', z') = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', 0) \frac{\partial}{\partial z''} G^{II}(x', z'; x'', 0) dx''. \quad (2)$$

Здесь E_{ex} — поле единичной амплитуды, создаваемое источником возбуждения в первой области, G^I и G^{II} — функции Грина областей I и II,

представленные в виде разложения по ортонормированной системе поперечных собственных функций областей I и II [1].

Подставляя (2) в (1), зафиксировав при этом точки наблюдения и точки источников, получим интегральное уравнение относительно искомого поля первой области:

$$E^I(x, z) = E_{ex}(x, z) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', 0) K(x, z; x'', 0) dx''; \quad (3)$$
$$K(x, z; x'', 0) = \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial z''} G^{\text{II}} \left(-\frac{a}{2}, z'; x'', 0 \right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{\text{I}} \left(x, z; -\frac{a}{2}, z' \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z''} G^{\text{II}} \left(\frac{a}{2}, z'; x'', 0 \right) \frac{\partial}{\partial x'} G^{\text{I}} \left(x, z; \frac{a}{2}, z' \right) \right] dz'.$$

Решая интегральное уравнение (3) можно получить выражения для определения коэффициента отражения падающей волны H_{10} в волновомде в итерации k -порядка в следующем виде:

$$R_{10}^{(k)} = R_{10}^{(k-1)} + V_{q=1}^{(k)}, \quad R_{10}^{(0)} = 0;$$
$$V_q^{(k)} = \sum_{m=-M}^M \sum_{q_0=1}^{Q_0} V_{q_0}^{(k-1)} D_{mq_0} C_{mq}, \quad V_q^{(0)} = 1.$$

Здесь C_{mq} и D_{mq} — коэффициенты, получаемые в результате интегрирования (3), M и Q_0 — число учитываемых типов волн.

В результате численного исследования приведенного алгоритма было установлено, что для относительных толщин стенок волноводов и углов сканирования, при которых $|R_{10}| \geq 0,5$, применение метода простой итерации становится невозможным. Полученный результат совпадает с оценками границ сходимости, основанными на вычислении нормы ядра интегрального оператора [2].

В этом случае для получения сходящегося решения алгоритм простой итерации метода Шварца может быть преобразован в метод оптимальной итерации. Выражение относительно поля в первой области в итерации k -порядка принимает вид:

$$E^{I(k)}(x, z) = \beta E_{ex}(x, z) + (1 - \beta) E^{I(k-1)}(x, z) + \beta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', 0) K(x, z; x'', 0) dx'';$$

С помощью коэффициента β можно выбрать оптимальное начальное приближение, для которого итерационный процесс будет сходиться к приближенному результату с минимальной относительной погрешностью.

В таблице 1 показаны численные результаты, полученные с помощью методов простой (МПИ) и оптимальной итерации (МОИ), а также показано сравнение с результатами, полученными методом частичных пересекаю-

щикхся областей (МЧПО) [3]. Параметри решетки следующие: относительная толщина стенок $t = (b - a)/b = 0,063$ и $0,12$; $b/\lambda = 0.5714$.

Таблица 1

t	$\sin\theta$	МЧПО		МПИ		МОИ	
		$ R_{10} $	Фаза	$ R_{10} $	Фаза	$ R_{10} $	Фаза
0,063	0,05	0,4714	157,98	0,4767	158,20	0,4714	157,91
	0,20	0,4623	156,62	0,4697	156,58	0,4621	156,55
	0,40	0,4282	151,59	0,4347	151,11	0,4280	151,52
	0,60	0,3450	139,20	0,3429	138,15	0,3446	139,13
	0,70	0,2452	124,05	0,2331	122,61	0,2445	123,97
0,12	0,05	0,8064	172,92	>1	—	0,8062	172,93
	0,20	0,8016	172,60	>1	—	0,8014	172,61
	0,40	0,7830	171,46	>1	—	0,7828	171,46
	0,60	0,7323	169,10	>1	—	0,7322	169,10
	0,70	0,6631	167,67	>1	—	0,6631	167,67

Здесь θ — угол сканирования. Число учитываемых типов волн составляло $M=8$, $Q=16$ для каждой итерации.

Литература

1. Амитей Н. Теория и анализ фазированных антенных решеток / Н. Амитей, В. Галиндо, Ч. Ву — М.: Мир, 1974. — 455 с.
2. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов — М.; Л. — 1962. — 708 с.
3. Прохода И. Г. Применение метода частичных пересекающихся областей для расчета волноводных ФАР с апертурными неоднородностями / И. Г. Прохода, В. М. Морозов // Электродинамика и физика СВЧ. Днепропетровск. — 1980. — С.34–42.

Анотація

Розглянуто методи простої та оптимальної ітерації, побудовані на основі альтернуючого методу Шварца. У наведеному прикладі розв'язана задача дифракції для нескінчених фазованої антенної решітки з плоскопаралельних хвилеводів.

Ключові слова: метод Шварца, функція Гріна, інтегральні рівняння.

Аннотация

Рассмотрены методы простой и оптимальной итерации, построенные на основе альтернирующего метода Шварца. В приведенном примере решена задача дифракции для бесконечной фазированной антенной решетки из плоскопараллельных волноводов.

Ключевые слова: метод Шварца, функция Грина, интегральные уравнения.

Abstract

Simple iteration and optimal iteration methods is considered. These methods are based on Schwarz alternating method. As an example, one solved the diffraction problem for an infinite linear phased array of parallel plate waveguides.

Keywords: Schwarz alternating method, Green's function, integral equations.